**CONJUNTOS NUMÉRICOS**

Realicemos un breve recorderis acerca de los conjuntos numéricos como lo son: los números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales.

**Números naturales:** se denotan por **N**, son los números con los que contamos y viene dado por el siguiente conjunto.

**N** = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. . .}

**Números enteros:** Se denotan por **Z** y son los números naturales con sus opuestos, es decir, negativos y el cero.

**Z** = {...-3, -2, 1-, 0, 1, 2, 3, 4, 5 ...}

**Números racionales:** se denotan por **Q** y son aquellos que se pueden representar de la forma  con a, b enteros y además b ≠ 0 y [a, b] = 1, es decir, primos relativos,

**Ejemplos:**

, , 7, -8

En el conjunto de los números racionales existe otro conjunto muy importante que son los números decimales, éstos se clasifican en:

**Decimales finitos:** son aquellos que tienen un número **finito** de cifras decimales

**Ejemplos:**

7,3 es un número racional dado que 7,3 = 

2,89 es un número racional dado que 2,89 = 

0,304 es un número racional dado que 0,304 = 

**Decimales infinitos:** los números decimales infinitos se clasifican en:

**a) Decimales periódicos:** son aquellos cuya parte decimal se repite en forma periódica o cíclica.

**Ejemplo**

0,3333333333… este número decimal periódico puede expresarse de la siguiente forma: 0,, es decir, que la rayita que se encuentra encima del número 3, nos indica que ese es el período, la cifra que se repite.

Además, es posible mostrar que 0,333333... O lo que es lo mismo 0, es un número racional siguiendo el siguiente procedimiento:

x = 0.33333 ... Llamamos “x” al valor dado, en éste caso 0.33333…

10x = 3,3333 ... se multiplica por 10, puesto que en este caso, la cifra decimal que se repite

es solo una. (La multiplicación se efectúa a ambos lados de la igualdad)

AHORA.

10x = 3,3333

x = 0.33333 ... Restamos las ecuaciones anteriores

9x = 3

x =  ... Despejamos “x”

x =  ... Simplificamos

Luego, podemos decir que 0, es un número racional dado que 0, = 

BD18185_

En general, los números naturales, los enteros, los decimales finitos

y los decimales infinitos periódicos son **números racionales**

j0232133

**EJEMPLO**

Mostrar que 0,1414141414... = 0, es un número racional

x = 0.141414 ... Llamamos “x” al valor dado

100x = 14,1414 ... Multiplicamos por 100, pues 2 es el número de cifras que se

Repiten, es decir, el periodo es de dos cifras.

100x = 14,1414

x = 0,141414 ... Restamos las ecuaciones anteriores

99x = 14

x =  ... Despejamos “x”

Luego, podemos decir que 0,141414... es un número racional dado que 0, = 

**NOTA IMPORTANTE:**

Existen algunos números decimales periódicos en los cuales, el periodo no aparece inmediatamente después del punto decimal.

**EJEMPLO**

0,1666666... el periodo es el 6, pero hay una cifra antes de dicho periodo, esa cifra es el 1.

0,37212121... el periodo es el 21, pero hay dos cifras antes de dicho periodo que son el

3 y el 7

6,4828282... el periodo es el 82, pero hay una cifra antes de dicho periodo, esa cifra es el 4.

0,4824131313... el periodo es el 13, pero hay cuatro cifras antes de dicho periodo que

Son el 4, el 8, el 2 y el 4.

Además, estos números, reciben el nombre de: decimales periódicos mixtos y también se pueden expresar como racionales, veamos:

j0232133

**EJEMPLO**

Mostrar que 0,1666666... Es un número racional.

x = 0,16666 ... Llamamos “x” al valor dado

10x = 1,66666 ... se multiplica por 10, puesto que en este caso, solamente hay una

Cifra antes del periodo.

100x = 16,6666... Se multiplica nuevamente por 10, puesto que el periodo esta

Formado solamente por una cifra

100x =16,6666...

10x = 1,66666 ...Restamos las ecuaciones anteriores

90x = 15

x =  ... Despejamos “x”

x =  ... Simplificamos

Luego, podemos decir que 0,16666... Es un número racional dado que 0,16666... = 

j0232133

**EJEMPLO**

Mostrar que 1,39656565... Es un número racional.

x = 1,39656565 ... Llamamos “x” al valor dado

100x = 139,656565 ... se multiplica por 100, puesto que en este caso, hay dos

cifras antes del periodo.

10000x = 13965,6565... Se multiplica nuevamente por 100, puesto que el periodo

está formado por **dos** cifras 6 y 5

10000x =13965,6565...

100x = 139,6565 ...Restamos las ecuaciones anteriores

9900x = 13826

x =  ... Despejamos “x”

x =  ... Simplificamos

Luego, podemos decir que 1,396565... Es un número racional dado que 1,396565... = 

**Números irracionales:** es el conjunto formado por todas las raíces no exactas de números naturales y en general por números que no se pueden expresar en forma racional.

j0232133

**EJEMPLO**

I = {}

**Números reales:** el conjunto de los números reales está formado por la unión de los números racionales y los números irracionales, es decir, **R = Q U I**

Al analizar la forma como se construyen los conjuntos de los números Racionales e Irracionales, se puede observar que estos conjuntos no tienen elementos en común, es decir son conjuntos [*disjuntos*](http://www.sanmartin.edu.co/academicos/distancia/sistemas/matcero/capitulo1.htm##)***.*** Si se “reúnen” en un solo conjunto los elementos del conjunto de los **números irracionales (I)** y **de los números racionales (Q),** se obtiene el denominado **“conjunto de los números reales”.**

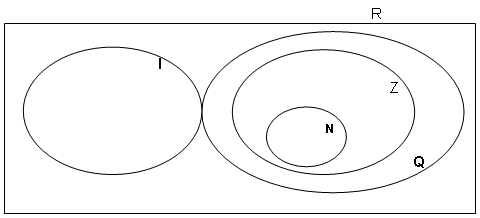
|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | **Conjuntos Disjuntos:** Se dice que los conjuntos **A y B** son disjuntos si **A y B no tienen elementos en común** | |

En este punto se debe aclarar que aunque el término **“reunir”** es un poco ambiguo, sirve para dar una **idea intuitiva** de cuáles son los elementos que constituyen el conjunto de los números reales. Estrictamente, hablando podemos definir el conjunto de los números reales como:

**capitulo1_clip_image020**

Donde R representa el conjunto de los números reales, y el símbolo capitulo1_clip_image022representa la [UNION](http://www.sanmartin.edu.co/academicos/distancia/sistemas/matcero/capitulo1.htm##) entre los conjuntos Q e I.

Usando [Diagramas de Venn](http://www.sanmartin.edu.co/academicos/distancia/sistemas/matcero/capitulo1.htm##) podemos esquematizar los conjuntos numéricos mencionados anteriormente y sacar algunas conclusiones.



A todo número real corresponde un punto sobre la recta y a todo punto sobre la recta le corresponde un número real.

Los números reales se representan usualmente en la recta numérica o recta real. Para ello es necesario ubicar el punto cero (punto de referencia) y saber que los números positivos se extienden indefinidamente hacia la derecha, al igual que los números negativos hacia la izquierda. Una de las formas para ubicar números reales es conocer la expresión decimal de cada número.

**Ejemplo**







j0232133

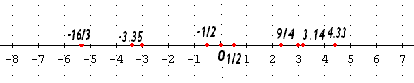
**EJEMPLO**

Ubicar en la recta numérica los siguientes valores:

3, -3, 0, 1/2, -1/2, 9/4, -16/3, 4.33333..., π, -3.35

**Solución**

Los puntos marcados con el color rojo, corresponden a los valores dados anteriormente:



Los números que están a la derecha del cero se llaman números reales positivos y se denotan por R+, los números que se encuentran a la izquierda de cero se llaman números reales negativos y se denotan por R-. El número cero no es negativo ni positivo.

La recta numérica ilustra gráficamente el orden de los números reales; si x y z son dos números reales y x < z, entonces la coordenada de x queda a la izquierda de la coordenada de z. Por tanto, podemos decir que los números reales son un conjunto ordenado y completo.

**PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES**

**Bajo la operación adición**

**CLAUSURATIVA O CERRADA**

Si a, b  R, entonces a + b  R

**Ejemplo:** 3,5 + 8,3 = 11,8

Al adicionar dos números reales se obtiene otro número real.

**CONMUTATIVA**

Si a, b  R, entonces a + b = b + a

**Ejemplo:** 3 + 5 = 5 + 3

8 = 8

**ASOCIATIVA**

Si a, b, c  R, entonces a + (b + c) = (a + b) + c

**Ejemplo:** 3 + (2 + 7) = (3 + 2) + 7 = (3 + 7) + 2

3 + 9 = 5 + 7 = 10 + 2

12 = 12 = 12

**MODULATIVA**

Existe un elemento 0 (cero) que pertenece al conjunto de los números reales, tal que: a + 0 = 0 + a = a

**Ejemplo:** 8 + 0 = 8 , 0 + 8 = 8

**ELEMENTO INVERSO O INVERTIVA**

Para todo número real a  R, existe otro denotado por –a, tal que a + (-a) = 0

**Ejemplo:**9,4 + (-9,4) = 0

**Bajo la operación multiplicación**

**CLAUSURATIVA O CERRADA**

Si a, b  R, entonces a**.**b  R

**Ejemplo**: (3,5).(8,3) = 29,05

Al multiplicar dos números reales se obtiene otro número real.

**CONMUTATIVA**

Si a, b  R, entonces a**.**b = b**.**a

**Ejemplo:**3.5 = 5.3

15 = 15

**ASOCIATIVA**

Si a, b, c  R, entonces a**.**(b**.**c) = (a**.**b)**.**c

**Ejemplo:**3 (2 . 7) = (3 . 2) 7

3 . 14 = 6 . 7

42 = 42

**MODULATIVA**

Existe un elemento 1 (uno) que pertenece al conjunto de los números reales, tal que: a**.**1 = a, para todo a que pertenezca a los números reales

**Ejemplo:** 6 . 1 = 6

**ELEMENTO INVERSO O INVERTIVA**

Si a ≠ 0, a  R entonces existe otro, denotado por a-1 ó por   R tal que a**.** = 1

**Ejemplo:** .2= 1

**PROPIEDAD DISTRIBUTIVA**

Si a, b, c  R, entonces a (b + c) = a**.**b + a**.**c

**Ejemplo:** 3(2 + 6) = 3. 2 + 3. 6 = 6 + 18 = 24

**OTRAS PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES**

* Si a  R, entonces –(-a) = a
* Si a  R, entonces –a = (-1).(a)
* Si a, b  R, entonces –a.b = (-a)b = a.(-b)
* Si a  R y a.b = 0, entonces a = 0 ó b = 0 ó ambos son cero

**Resolvamos situaciones**



Juliana compró un CD (disco compacto) con 13 canciones. Si para escuchar todas las canciones se necesitan 34 minutos, 23 segundos, ¿Cuál es la duración aproximada de cada canción en segundos? ¿Es un número racional o irracional?

**Solución**

Recordemos que en un minuto han transcurrido 60 segundos, por lo tanto, transformemos el tiempo requerido para escuchar las canciones en segundos, como se necesitan 34 minutos, 23 segundos, debemos transformar los minutos a segundos, entonces:

Multipliquemos los 34 minutos por 60

34 x 60 = 2040

Por lo tanto en 34 minutos transcurren 2040 segundos

Entonces 2040 + 23 = 2063

Es decir que para escuchar todas las canciones se necesitan 2063 segundos

Ahora dividamos el tiempo requerido para escuchar las canciones entre el número de canciones, que en este caso son 13.

2063 ÷ 13 = 158,6923077 ≈ 158,69

Es un número irracional que podemos aproximar al números 158,69

Entonces podemos decir que la duración aproximada de cada canción es de 158,69 segundos

Para solucionar ecuaciones con radicales es conveniente segur el siguiente proceso:

1. Aislar el radical
2. Elevar a una potencia tal que se elimine el radical. Esta operación debe repetirse las veces que sea necesario para obtener una ecuación sin radicales.
3. Verificar el resultado sustituyendo el valor encontrado en la ecuación original para descartar las soluciones inconsistentes.

j0232133

**EJEMPLO**

Resolver la ecuación 

**Solución**

 Se aísla el radical

 Se eleva al cuadrado para eliminar el radical

3x -6 = 9 Se elimina el radical y se realizan las operaciones

 Se halla el valor de x

 Se verifica el valor de x en la ecuación original

 Luego x = 5, es la solución de la ecuación.

j0232133

**EJEMPLO**

Resolver la ecuación 

**Solución**

 Se eleva al cuadrado

 Se elimina el radical y se realizan las operaciones

 Se aísla el radical

 Se simplifican expresiones y se eleva al cuadrado nuevamente

361 = 64(3x + 4) Se desarrollan los cuadrados

 Se halla el valor de x.

 Se verifica el valor de x en la ecuación original

 Sumando y simplificando



Por lo tanto:  Así, x = 35/64 es la solución de la ecuación.

**NOTA IMPORTANTE:**

*Durante todo el año haremos mucho uso de la potenciación y la radicación de números reales, éste es un tema que ya se ha estudiado en años anteriores, de modo que si aún tienes algunas dudas al respecto, te sugiero que lo consultes y lo repases, además recuerda que también puedes acudir a tu facilitadora, para consultarle cualquier inquietud con respecto al tema.*

**Situación**

La familia Vásquez salió de la ciudad; después de un tiempo de viaje se detienen en un restaurante a 140 km, y se dan cuenta que el automóvil tiene poco combustible. En el mapa que llevan observan que hay dos estaciones de combustible, una ubicada en el kilómetro 208 y la otra en el kilómetro 78. Para decidir a cuál estación deben dirigirse y gastar menos combustible, hallan la distancia a cada estación.

Para determinar la distancia entre dos puntos de la recta real A y B, necesitamos la noción de valor absoluto.



Si se quiere representar la distancia entre cero y un número cualquiera x, entonces, si x es positivo la distancia entre x y 0 (origen) es x, por otra parte si x es negativo entonces la distancia entre x y 0 es también x.

Se emplea la notación | x| para representar la distancia entre x y 0, es decir, el valor absoluto de un número real denotado por | x| se define como:

x, si x > 0

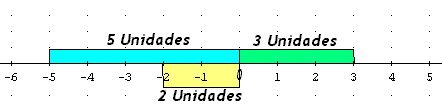
 0, si x = 0

-x, si x < 0

j0232133

**EJEMPLO**

| 3| = 3; | -3| = - (-3) = 3; | 0| = 0



**Nota**: podemos observar que al hallar los valores absolutos de una lista de números dados, éstos siempre son positivos, puesto que estos valores representan distancias y las distancias siempre son positivas.

Si deseamos hallar la distancia entre dos puntos cualquiera de la recta real, aplicamos la siguiente definición: si x, y son dos puntos sobre la recta real, entonces la distancia entre x, y es el número real , el cual se determina por:

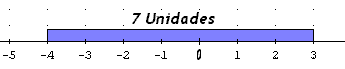
 x - y, si x > y

y – x, si x < y

j0232133

**EJEMPLO**

Hallemos la distancia entre los puntos -4 y 3 de la recta real.



|3 – (-4)| = |3 + 4| = |7| = 7

Las propiedades que se emplean con mayor frecuencia para resolver ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto se denotan a continuación:

**PROPIEDAD 1**

Para todo número real x, ⎜x⎜

j0232133

**EJEMPLO**

⎜7⎜= 7

⎜-7⎜= - (-7) = 7

⎜0⎜= 0

**PROPIEDAD 2**

Para todo número x, y que pertenecen a los números reales se cumple lo siguiente:

⎜x.y⎜= ⎜x⎜.⎜y⎜

**Demostración**  
  
Para demostrar esta propiedad conviene recordar que:



En particular:



Usando esta definición se tiene que:



⎜x.y⎜= ⎜x⎜.⎜y⎜

j0232133

**EJEMPLO**

⎜4. (-5) ⎜= ⎜4⎜.⎜-5⎜

⎜-20⎜ = 4.5

20 = 20

**PROPIEDAD 3**

Si x, y pertenecen a los números reales y además y ≠ 0, se cumple que:

img2  
**Demostración**

Aquí también usaremos el hecho de que:

$\forall a, a\, \in \, I\! \! R:\, \vert a\vert = \sqrt{a^{2}}$

Si x, y pertenecen a los números reales y además y ≠ 0, entonces x/y pertenece a los números reales 

Luego:   
img2

j0232133

**EJEMPLO**



5 = 5

**PROPIEDAD 4**

Si x es un número real cualquiera y **a** es un número real positivo entonces se cumple que: ⎜x⎜< a, lo cual es equivalente a: -a < x < a

**EJEMPLO**

* ⎜x⎜5 es equivalente a: -5  x  5
* ⎜x - 2⎜< 8

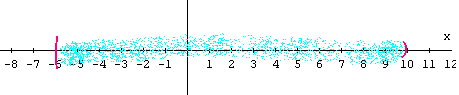
Aplicando la propiedad se tiene que:

-8 < x - 2 < 8

-8 + 2 < x – 2 + 2 < 8 + 2

-6 < x < 10

Interpretación geométrica de esta propiedad:



**PROPIEDAD 5**

Si x es un número real cualquiera y **a** es un número real positivo entonces:

, lo cual es equivalente a:  ó 

j0232133

**EJEMPLO**



x  2 ó x  -2

**PROPIEDAD 6**

Si a y b son números reales entonces

⎜a - b⎜ = ⎜b - a⎜

j0232133

**EJEMPLO**

⎜7 - 4⎜ = ⎜4 - 7⎜

⎜3⎜ = ⎜-3⎜

3 = 3

j0232133

**EJEMPLO**

⎜9 – (-2)⎜ = ⎜(-2) - 9⎜

⎜9 + 2⎜ = ⎜-11⎜

⎜11⎜= ⎜-11⎜

11 = 11

**PROPIEDAD 7**

Si x pertenece al conjunto de los números reales entonces ⎜x⎜=⎜-x⎜

j0232133

**EJEMPLO**

⎜8⎜= ⎜-8⎜

8 = 8

Para resolver ecuaciones con valor absoluto se aplica la definición de valor absoluto y sus propiedades.

j0232133

**EJEMPLO**

⎜5x - 8⎜=12

Aplicando la definición de valor absoluto, se puede escribir:

5x – 8 = 12 v 5x – 8 = -12

Se suma 8 a ambos términos de las dos igualdades

5x – 8 + 8 = 12 + 8 v 5x – 8 + 8 = -12 + 8

5x = 20 v 5x = -4

x = 20/5 v x = -4/5

x = 4 v x = -4/5

Luego el conjunto solución es: **S = {4, -4/5}**

Comprobación o prueba:

Para x = 4 Para x = -4/5

⎜5(4) - 8⎜=12 ⎜5(-4/5) - 8⎜= 12

⎜20 – 8⎜=12 ⎜-20/5 - 8⎜= 12

⎜12⎜=12 ⎜-4 - 8⎜= 12

12 = 12 ⎜-12⎜= 12

12 = 12

j0232133

**EJEMPLO**

⎜x + 5⎜=11

Aplicando la definición de valor absoluto, se puede escribir:

x + 5 = 11 v x + 8 = -11

Se resta 5 a ambos términos de las dos igualdades

x + 5 - 5 = 11 - 5 v x + 5 - 5 = -11 - 5

x = 6 v x = -16

Luego el conjunto solución es: **S = {6, -16}**

Comprobación o prueba:

Para x = 6 Para x = -16

⎜6 + 5⎜= 11 ⎜-16 + 5⎜= 11

⎜11⎜= 11 ⎜-11⎜= 1

11 = 11 11 = 11

j0232133

**EJEMPLO**

Determinar los valores de “x” que satisfacen la ecuación.





Luego el conjunto solución es: **S** ={5/8, -3/7}

**BIBLIOGRAFÍA**

RODRÍGUEZ, Benjamín P., Et al. Matemáticas. s-l.: Prentice Hall, 2000.

URIBE, Julio A., ORTIZ, Marco T. Matemática Experimental 8. 2 ed.s.l.; Uros Editores, 2005,

ARDILA, Víctor H., Olimpiadas Matemáticas 8. s.l: Voluntad,1999

TORRES, Blanca N., Et al, Supermat Matemáticas. s.l: Voluntad, 2000

BALDOR, A. Álgebra. S.l.: Ediciones y Publicaciones Preludio, 1996

ENCARTA, Biblioteca de Consulta, 2006

MESA, Martha y otros. Símbolos 9°. Editorial Voluntad S.A. Bogotá. 2006

LONDOÑO, Nelson. BEDOYA, Hernando. Matemática progresiva 9°. Editorial Norma S.A. Bogotá. 1988

**CIBERGRAFÍA**

[www.sectormatematica.cl/media/redtermsem.htm](http://www.sectormatematica.cl/)